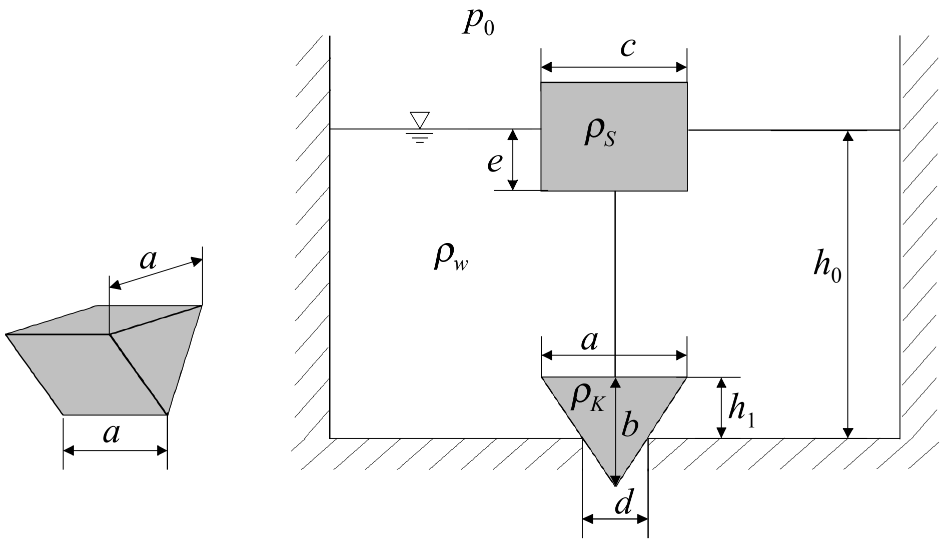
Aufgabe 4.4: In einem mit Wasser (Dichte ρ_w) gefülltem Behälter schwimmt ein würfelförmiger Schwimmkörper (Kantenlänge c, Dichte ρ_S). Am Grund des Behälterbodens verschließt ein keilförmiger Körper (Kantenlängen a und Höhe b, Dichte ρ_K) eine rechteckige Ausflußöffnung (Breite d, Länge a). In der Öffnung wirkt wieder Umgebungsdruck p_0. Der Keil ist durch einen masselosen, dünnen Faden mit dem darüberliegenden Schwimmer verbunden und bei einem Wasserstand h_0 gerade gestreckt aber noch nicht gespannt.



a) Wie lautet die Eintauchtiefe e des Schwimmers bei nicht gespannten Faden?

b) Welche resultierende Kraft wirkt bei dem Füllstand h_0 auf den Keil ?

c) Bei welchem Füllstand wird der Keil angehoben, und wie weit ist dafür der Schwimmer eingetaucht?

Gegeben: g, a, b, c, d, h_0, p_0, ρ_K, ρ_S, ρ_w,

Lösung: a) Bei nicht gespanntem Faden wirkt auf den Schwimmer nur die eigene Gewichtskraft. Als Bedingung damit der Quader schwimmt, muß die Gewichtskraft des Schwimmers

$$F_G = \rho_S g c^3$$

gleich der Auftriebskraft

$$F_A = \rho_w g c^2 e$$

des vom Schwimmer verdrängten Wasservolumens entsprechen. Somit gilt:

$$F_G = F_A$$
$$\rho_S g c^3 = \rho_w g c^2 e.$$

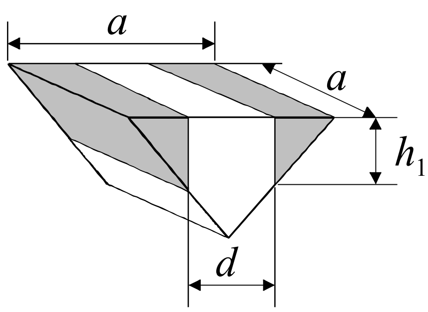
Auflösen liefert die gesuchte Eintauchtiefe

$$\underline{\underline{e = \frac{\rho_S}{\rho_w} c.}}$$

b) Die resultierende Kraft F_R auf den Keil setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft F_G und der Auftriebskraft F_A des Keils, sowie aus der vom hydrostatischen Druck auf den Keil bedingten Druckkraft F_D. Unter Beachtung der Geometrie des Keils folgt für die Gewichtskraft:

$$F_G = \rho_K g \frac{1}{2} a^2 b\,.$$

Die Auftriebskraft ergibt sich hierbei nicht aus dem insgesamt vom Keil verdrängten Wasservolumen, sondern nur aus den seitlichen Prismen, welche nicht direkt über der rechteckigen Öffnung liegen. Das Volumen dieser beiden Prismen beträgt:



$$V_P = a\left(h_1\left(\frac{a}{2} - \frac{d}{2}\right)\right),$$

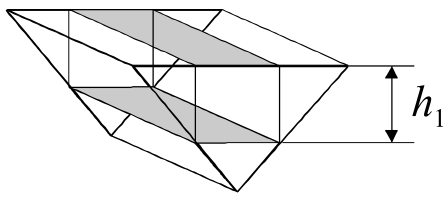
wobei die Höhe h_1 geometrisch durch

$$h_1 = b\left(1 - \frac{d}{a}\right)$$

bestimmt wird. Für die Auftriebskraft folgt damit

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_w g V_P \\ &= \rho_w g \frac{1}{2} h_1 \left(a^2 - ad\right). \end{aligned}$$

Für die Berechnung der hydrostatischen Druckkraft auf den Körper wird nur die Angriffsfläche berücksichtigt, welche die Ausflußöffnung verschließt. Die Druckkraft wirkt demnach über der Querschnittsfläche der Ausflußöffnung, welche jedoch auf die Basisfläche des Keils in der Wasserhöhe (h_o - h_1) projiziert wird. Man erhält damit für die Druckkraft



$$F_D = \rho_w g a d \left(h_0 - h_1\right).$$

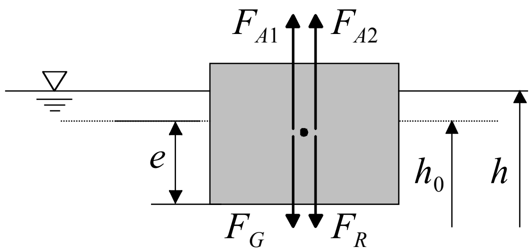
Als resultierende Kraft auf den Körper folgt damit:

$$\underline{\underline{F_R = F_G - F_A + F_D.}}$$

Einsetzen und Auflösen liefert:

$$F_R = \rho_K g \frac{1}{2} a^2 b - \rho_w g \frac{1}{2} h_1 \left(a^2 - ad\right) + \rho_w g a d \left(h_0 - h_1\right)$$
$$= \frac{1}{2} g \left(\rho_K a^2 b - \rho_w h_1 \left(a^2 - ad\right) + 2\rho_w a d \left(h_0 - h_1\right)\right)$$
$$\underline{\underline{F_R = \frac{1}{2} g a^2 \left(\rho_K b - \rho_w h_1 \left(1 - \frac{d}{a}\right) + 2\rho_w \frac{d}{a}\left(h_0 - h_1\right)\right).}}$$

c) Zur Berechnung des Füllstandes *h*, bei welchem der Keil vom Boden angehoben wird ist es angebracht eine Kräftebilanz am Schwimmer vorzunehmen. Die Auftriebskraft F_{A1} bedingt durch Eintauchen des Körpers um die Höhe *e* entspricht der Gewichtskraft F_G (siehe unter Aufgabenpunkt a)). Demnach muß die zusätzliche Auftriebskraft F_{A2}, welche durch eine Erhöhung des Füllstandes und damit verbundenem weiteren Eintauchen des Körpers um die Höhe h - h_0 hervorgerufen wird, größer als die resultierende Kraft auf den Keil sein. Für die zusätzliche Auftriebskraft erhält man



$$F_{A2} = \rho_w g c^2 \left(h - h_0\right).$$

Mit der resultierenden Kraft auf den Keil (aus Aufgabenpunkt c), wobei die Höhe h_0 hierbei durch *h* ersetzt werden muß)

$$F_R = \frac{1}{2} g a^2 \left(\rho_K b - \rho_w h_1 \left(1 - \frac{d}{a}\right) + 2\rho_w \frac{d}{a}\left(h - h_1\right)\right)$$

folgt mit der Bedingung zum Abheben des Keils der gesuchte Füllstand

$$F_{A2} > F_R$$
$$\rho_w g c^2 \left(h - h_0\right) > \frac{1}{2} g a^2 \left(\rho_K b - \rho_w h_1 \left(1 - \frac{d}{a}\right) + 2\rho_w \frac{d}{a}\left(h - h_1\right)\right)$$
$$\rho_w c^2 \left(h - h_0\right) > \frac{1}{2} a^2 \left(\rho_K b - \rho_w h_1 \left(1 - \frac{d}{a}\right)\right) + \rho_w d a \left(h - h_1\right)$$
$$c^2 \left(h - h_0\right) - da\left(h - h_1\right) > \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\rho_K}{\rho_w} b - h_1 \left(1 - \frac{d}{a}\right)\right)$$
$$\underline{\underline{h > \frac{1}{c^2 - da}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho_K}{\rho_w} b a^2 + c^2 h_0 - \frac{1}{2} h_1 \left(a^2 + da\right)\right).}}$$