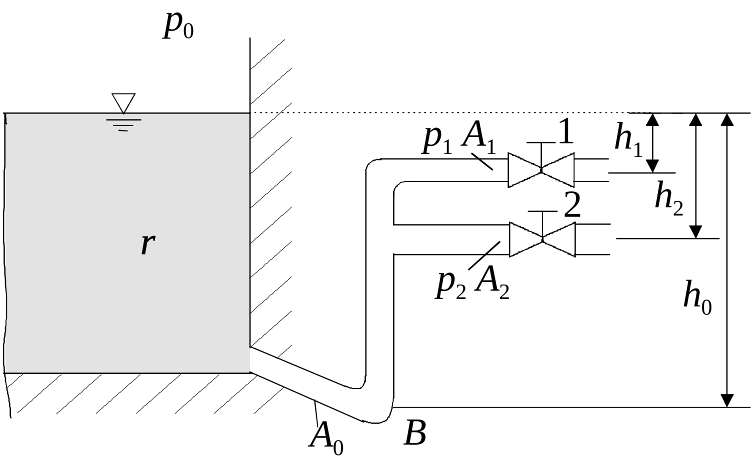

Aufgabe 4.3: Ein großes Wasserbecken dessen Flüssigkeitsspiegel als konstant anzusehen ist, speist ein Rohrleitungsystem mit verschiedenen Rohrquerschnitten (A_0, A_1, A_2). Die Austrittsöffnungen des Rohrsystems können durch Ventile (1 und 2) geöffnet werden, wodurch ein Ausströmen ins Freie erfolgt. Druckverluste an den geöffneten Ventilen und am Knick B sind zu vernachlässigen.

a) Wie lauten die Drücke p_1 und p_2 im Rohrinneren bei geschlossenen Ventilen 1 und 2?

b) Welche stationären Ausflußgeschwindigkeiten stellen sich an den beiden Austrittsöffnungen unter der Annahme eines konstanten Wasserspiegels h_0 ein, wenn die beiden Ventile 1 und 2 geöffnet werden?

c) Wie muß dann das Flächenverhältnis A_1/A_2 gewählt werden, damit die beiden Teilausflußmengen gleich sind?

d) Welcher Druck herrscht unter diesen Voraussetzungen im Knick B?

Gegeben: g, h_0, h_1, h_2, A_0, A_1, A_2,b, p_0, ρ

Lösung: a) Mit geschlossenen Ventilen stellen sich die Drücke p_1 und p_2 aufgrund der hydrostatischen Grundgleichung wie folgt ein:

$$\underline{\underline{p_1 = p_0 + rgh_1}}\,,$$

$$\underline{\underline{p_2 = p_0 + rgh_2}}\,.$$

b) Zur Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeiten an den Austrittsöffnungen bei geöffneten Ventilen wird die Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömung entlang eines Stromfadens von der Oberfläche des Wasserbeckens (Geschwindigkeit der Oberfläche ist gleich null) bis zu den Austrittsöffnungen angesetzt, wobei der Ursprung des Koordinatensystems für die geodätische Höhe in den Knick B gelegt wird:

$$p_0 + rgh_0 = p_0 + rg\left(h_0 - h_1\right) + \frac{1}{2} r v_1^{\,2}\,,$$

$$p_0 + rgh_0 = p_0 + rg\left(h_0 - h_2\right) + \frac{1}{2} r v_2^{\,2}\,.$$

Eliminierung und Umformung liefern die Beziehungen für die Ausströmgeschwindigkeiten, welche der TORRICELLI'schen Ausflußformel für reibungslose Strömungen entsprechen

$$\underline{\underline{v_1 = \sqrt{2gh_1}}}\ ,$$

$$\underline{\underline{v_2 = \sqrt{2gh_2}}}\ .$$

c) Das Flächenverhältnis A_1/A_2 unter der Voraussetzung gleich großer Teilausflußmengen gewinnt man durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung für stationäre Strömungen:

$$\dot{V} = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Einsetzen der obigen Beziehungen für v_1 und v_2 liefert das gesuchte Verhältnis

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\ .$$

d) Den Druck im Knick B erhält zum einen mit der Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{V}_{ges} = v_B A_0 = v_1 A_1 + v_2 A_2$$

Umstellen liefert die Geschwindigkeit im Knick B

$$v_B = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_0}\ .$$

Des weiteren wird die Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömungen entlang eines Stromfadens von Oberfläche des Wasserbeckens bis zum Knick B angesetzt:

$$p_0 + rgh_0 = p_k + \frac{1}{2} r \left(\frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_0} \right)^2$$

Umstellen nach p_k und Einsetzen der obigen Beziehung liefert:

$$\begin{aligned}
p_k &= p_0 + rgh_0 - \frac{1}{2} r \left(A_1 v_1 \frac{1 + \frac{v_2}{v_1}\frac{A_2}{A_1}}{A_0} \right)^2 \\
&= p_0 + rgh_0 - \frac{1}{2} r \left(A_1 v_1 \frac{1 + \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}}{A_0} \right)^2 \\
&= p_0 + rgh_0 - 2r \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^2 v_1^2
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{p_k = p_0 + rgh_0 - 4r \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^2 gh_1.}}$$