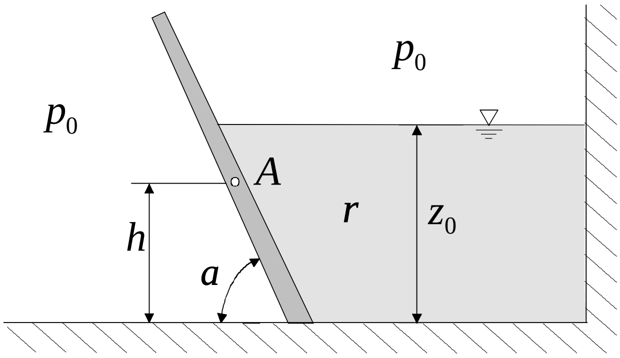
Aufgabe 4.2: Ein Klappenwehr der Breite *b* und gelagert im Lager *A* trennt ein Flüssigkeitsreservoir mit variablem Füllstand z_0 dicht vom daneben liegenden Bereich ab. Die Lagerachse *A* liegt im Schwerpunkt der Klappe, welche im geschlossenen Zustand um den Winkel α geneigt ist.



a) Wie lautet die resultierende Kraft und das resultierende Moment im Bezug zur Wehrachse *A*, welche von der Flüssigkeit auf die Wehrklappe ausgeübt werden?

b) Bei welchem Wasserstand z_0 öffnet das Wehr selbständig?

c) Berechnen Sie das maximale Moment, das erforderlich ist, um das Klappenwehr bei niedrigem Wasserstand zu öffnen!

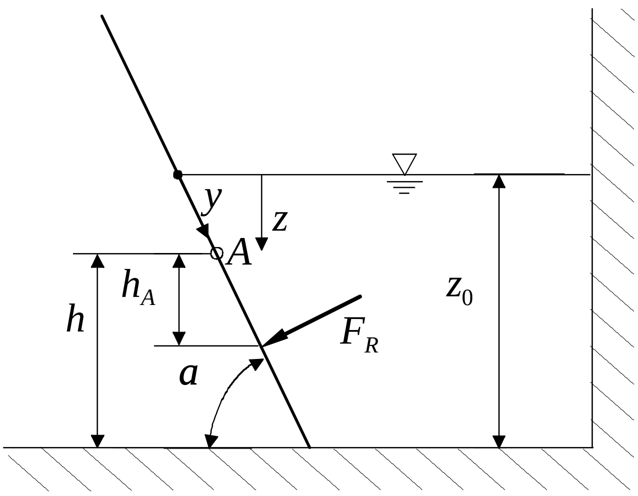
Gegeben: g, h, b, α, p_0, ρ

Lösung: a) Die resultierende Druckkraft F_R als Funktion vom Wasserstand z_0 ist das Integral aller auf die Wehrklappe ausgeübter Kräfte

$$F_R(z_0) = \int \mathrm{d}F \,,$$

wobei für die Kraft d*F* auf dem Flächenelement d*A* folgt:

$$\mathrm{d}F = \left(p(z) - p_0\right)\mathrm{d}A \,.$$



Der hydrostatische Druck auf der Innenseite des Reservoirs setzt sich dabei wie folgt zusammen:

$$p(z) = \rho g z + p_0 \,.$$

Das Flächenelement d*A* ist unter Beachtung des Neigungswinkels der Wehrklappe

$$\underline{\underline{\mathrm{d}A = \frac{b}{\sin\alpha}\mathrm{d}z}} \,.$$

Einsetzen und Integration liefert schließlich die Beziehung für die resultierende Druckkraft

$$F_R(z_0) = \int_0^{z_0} \rho g \frac{b}{\sin\alpha} z \,\mathrm{d}z$$
$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\rho g b \frac{z_0^{\,2}}{\sin\alpha}}} \,.$$

Das Drehmoment, welches die Flüssigkeit im Bezug zum Lagerpunkt auf die Wehrklappe ausübt, errechnet sich aus dem Produkt der resultierenden Kraft d*F* und der Hebellänge r_A zwischen dem Kraftangriffspunkt und dem Wehrlager *A*:

$$\mathrm{d}M = r_A(z)\,\mathrm{d}F(z)\,.$$

Die Hebellänge r_A ergibt aus

$$r_A = \frac{h_A}{\sin a}$$

mit $$h_A = z - z_0 + h\,.$$

Für die Kraft d*F* folgt analog:

$$\mathrm{d}F(z) = r g \frac{b}{\sin a} z\,\mathrm{d}z\,.$$

Einsetzen und Integration über z_0 liefert:

$$M(z_0) = \int_0^{z_0} r_A(z)\,\mathrm{d}F(z)$$

$$= \int_0^{z_0} \frac{z - z_0 + h}{\sin a} r g \frac{b}{\sin a} z\,\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{M(z_0) = \frac{r g b}{\sin^2 a} z_0^2 \left[\frac{1}{2}h - \frac{1}{6}z_0\right].}}$$

b) Das Wehr öffnet selbständig, wenn der Kraftangriffspunkt exakt im Lager *A* bzw. gerade über dem Lager angreift und damit das Moment *M* kleiner gleich null wird:

$$M(z_0) \le 0$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{z_0 \ge 3h}}$$

c) Das maximale Moment erhält man durch Ableitung der Momentenfunktion *M*(*z*) nach z:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = 0\,.$$

Einsetzen der obigen Momentenfunktion und Auflösung liefert zwei Lösungen

$$z_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{z_0 = 2h}}\,,$$

wobei nur die letztere sinnvoll ist.