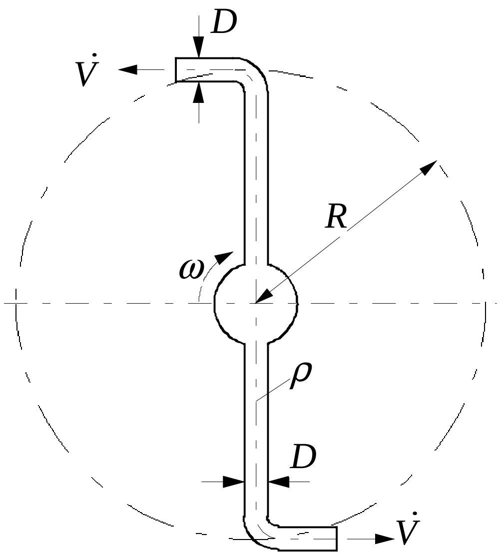


Aufgabe 4.10: Am dargestellten Wasserrad tritt aus den beiden Rohren (Durchmesser *D*) jeweils ein Wasserstrahl mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ in die Atmosphäre aus. Die Rohre sind so gefertigt, dass über einen 90° Krümmer (Verluste an den Krümmern werden nicht berücksichtigt) der Freistrahl das Rohr tangential zum mit *R* gebildeten Drehkreis des Rades verlässt. Die Drehachse, in welcher das Wasser zugeführt wird, liegt parallel zum Gravitationsvektor.

a) Wie groß ist zum Zeitpunkt des Anfahrens das Drehmoment *M*, das das ausströmende Wassser auf das Wasserrad ausübt?

b) Wie lautet die stationäre Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich das Wasserrad dreht und dabei ein Reibmoment M_R überwinden muß?

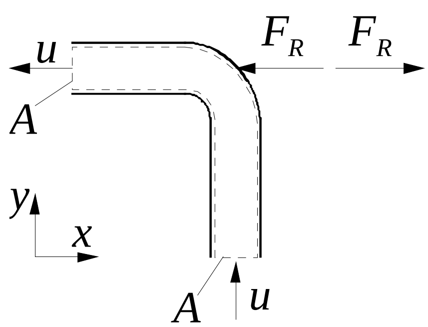
c) Mit welcher theoretischen Winkelgeschwindigkeit dreht beim Ausströmen des Volumenstroms $\dot{V}$ das Wasserrad ohne Auftreten eines Reibmoments maximal?

Gegeben: $\dot{V} = 0{,}75$ l/s, $D = 0{,}015$ m, $R = 0{,}25$ m,
$\rho = 1000$ kg/m³, $M_R = 1$ Nm

Lösung: a) Die Ausströmgeschwindigkeit aus den Rohren wird mit der Konti-Gleichung bestimmt:

$$\dot{V} = uA = u\frac{\pi D^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = 4{,}244 \text{ m/s}.$$

Zur Berechnung der Rückstoßkraft F_R einer Düse wird der Impulssatz in *x*-Richtung (Tangentialrichtung) angewendet (Das Rad befindet sich im Stillstand und die Düse führt keine Relativbewegung zur Umgebung aus!):



$$\frac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t} = \sum F_x = -F_R = \dot{m}\,(-u+0)\,.$$

Damit lautet die Rückstellkraft für eine Düse:

$$F_R = \dot{m}u = \rho A u^2 = 3183 \text{ N}.$$

Aus einer Momentenbilanz um den Drehmittelpunkt des Rades (positive Momente wirken im Urzeigersinn) erhält man das gesuchte Drehmoment *M*, welches auf das Wasserrad ausgeübt wird:

$$-M + 2F_R R = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = 2\rho A u^2 R = 1{,}592 \text{ Nm}.$$

b) Befindet sich das Wasserrad in stationärer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω, dann bewegen sich die Düsen mit der Tangentialgeschwindigkeit

$$v_t = wR$$

fort. Die in die Impulsbilanz eingehende Geschwindigkeitskomponente verringert sich damit um den Betrag von v_t. Die Impulsbilanz in x-Richtung lautet damit:

$$\frac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t} = \sum F_x = -F_R = \dot{m}\left(-(u - vt) + 0\right).$$

Die Rückstoßkraft für eine Düse lautet damit:

$$F_R = \dot{m}\left(u - v_t\right) = \rho A u \left(u - v_t\right).$$

Eine Momentenbilanz um den Drehmittelpunkt des Rades liefert:

$$M_R = 2F_R R = 2R\rho A u \left(u - v_t\right).$$

Einsetzen von v_t und umstellen nach ω:

$$\omega = \frac{u}{R} - \frac{M_R}{2R^2 \rho A u} = 6{,}31 \; \frac{1}{\text{s}}.$$

c) Die maximal erreichbare Geschwindigkeit wird erreicht, wenn sich das Wasserrad mit einer Tangentialgeschwindigkeit dreht, welche der Ausströmgeschwindigkeit u entspricht, denn dann wird die Rückstellkraft zu null. Demnach ergibt sich:

$$v_t = u = 4{,}244 \text{ m/s} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v_t}{R} = 16{,}98 \; \frac{1}{\text{s}}.$$