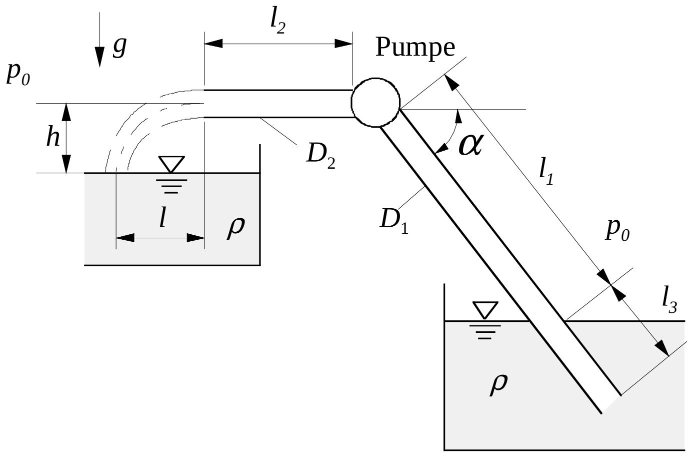


Aufgabe 4.9: Im dargestellten Rohrsystem (Rohr 1: Durchmesser D_1, Länge l_1, Neigung α, Rohr 2: Durchmesser D_2, Länge l_2) wird Wasser über eine Pumpe (Wellenleistung P, Wirkungsgrad η) in einen höher liegenden Behälter gepumpt. Beim Rohrausgang in der Höhe h wird eine Springweite l des Wassers gemessen. Druckverluste durch Krümmung werden im Gegensatz zur Rohrreibung nicht berücksichtigt. Die Füllstände der Reservoire werden als konstant angenommen.

a) Wie groß ist die Ausflussgeschwindigkeit am Rohr?

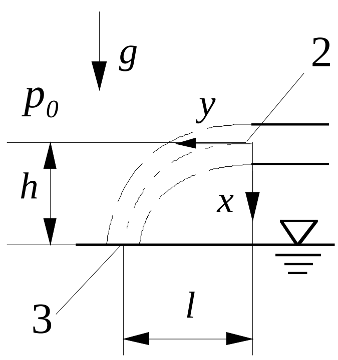
b) Berechnen Sie den Volumenstrom durch das System. (Hinweis: Falls Aufgabenpunkt a) nicht gelöst wurde, rechnen Sie bitte mit der Ausflussgeschwindigkeit $u_2 = 2\ \text{m/s}$ weiter!)!

c) Wie lautet der Druckverlust durch Rohrreibung im Rohrsystem?

d) Wie groß ist dabei die Rohrreibungszahl λ (Hinweis: In beiden Rohren gilt derselbe Wert für λ).

Gegeben:	$h = 3\ \text{m}$	$l = 1{,}9\ \text{m}$,	
	$l_1 = 18\ \text{m}$,	$l_2 = 12\ \text{m}$,	$l_3 = 4\ \text{m}$,
	$D_1 = 1{,}2\ \text{m}$,	$D_2 = 1{,}5\ \text{m}$,	
	$\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$,	$P = 580\ \text{kW}$,	$\eta = 0{,}85$,
	$g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$,	$\alpha = 30°$	

Lösung: a) Zur Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit aus dem Rohr wird zunächst die Bernoulli-Gleichung von Punkt 2 nach Punkt 3 (siehe Skizze) angesetzt:



$$p_0 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho u_3^2 \,.$$

Man erhält für die Geschwindigkeit beim Auftreffen:

$$u_3^2 = u_2^2 + 2gh \,,$$

die sich aus einer horizontalen (Geschwindigkeit u_{3y}) und der vertikalen Komponente (Geschwindigkeit u_{3x}) zusammensetzt. Diese Komponenten werden aus der Kinematik bestimmt. Bei Betrachtung eines Massenpunktes (Koordinatensystem wie in der Skizze aufgeführt) erhält man:

$$\ddot{x} = g \qquad\qquad \ddot{y} = 0$$

$$\dot{x} = gt + C_1 \qquad \dot{y} = C_3$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \qquad y = C_3 t + C_4$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\dot{y}(t=0) = u_2 \quad \Rightarrow \quad C_3 = u_2$$

$$y(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

Nach der Zeit t_f erreich der Massenpunkt die Oberfläche des Reservoirs. Somit gilt:

$$\dot{x}(t=t_f) = u_{3x} \quad \Rightarrow \quad u_{3x} = gt_f$$

$$\dot{y}(t=t_f) = u_2 = u_{3y}$$

$$y(t=t_f) = l \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{l}{t_f}$$

Vektorielle Addition der Geschwindigkeitskomponenten liefert:

$$u_3^2 = u_{3x}^2 + u_{3y}^2 = \left(gt_f\right)^2 + u_2^2 .$$

Gleichsetzen mit der oberen Bedingung aus der Bernoulli-Gleichung liefert:

$$\left(gt_f\right)^2 + u_2^2 = u_2^2 + 2gh .$$

Nach Umformung erhält man für die Zeit:

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}782 \text{ s}$$

und schließlich mit:

$$u_2 = \frac{l}{t_f} = \sqrt{\frac{l^2 g}{2h}} = 2{,}43 \text{ m/s}$$

die gesuchte Ausflussgeschwindigkeit.

b) (Lösungen durch die Hilfestellung werden in Klammern angegeben!) Der Volumenstrom folgt aus der Konti-Gleichung:

$$\dot{V} = u_1 A_1 = u_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = u_1 \pi \frac{D_1^2}{4} = u_2 \pi \frac{D_2^2}{4} \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 \frac{D_2^2}{D_1^2}$$

$\dot{V} = 4{,}29 \text{ m}^3\text{/s} \; (3{,}53 \text{ m}^3\text{/s})$ mit $u_1 = 3{,}8 \text{ m/s} \; (3{,}13 \text{ m/s})$.

a) Die mechanische Leistung der Pumpe erhält man mit dem Wirkungsgrad η

$$P_M = P\eta \,.$$

Mit der spezifischen technischen Arbeit

$$w_{t12} = \frac{P_M}{\dot{m}} = \frac{P\eta}{\dot{V}\rho} = 114{,}85 \text{ Ws/kg}$$

ergibt sich der Druckstieg über der Pumpe

$$\Delta p_P = \rho w_{t12} = \frac{P\eta}{\dot{V}} = 114851 \text{ Pa } (139490 \text{ Pa}) \,.$$

Die Bernoulli-Gleichung angewendet von der Oberfläche des unteren Reservoirs bis zum Ausfluß (Punkt 2) ergibt sich unter Berücksichtigung der Druckdifferenz Δp_P an der Pumpe sowie des Reibungsdruckverlustes Δp_R zu:

$$p_0 + \Delta p_P = p_0 + \frac{1}{2}\rho u_2^{\,2} + \rho g l_1 \sin\alpha + \Delta p_R \,.$$

Umstellen liefert den Druckverlust durch Reibung im Rohrsystem:

$$\begin{aligned}\Delta p_R &= \Delta p_P - \frac{1}{2}\rho u_2^{\,2} + \frac{1}{2}\rho g l_1 \\ &= \frac{P\eta}{\dot{V}} - \frac{1}{2}\rho\left(u_2^{\,2} + g l_1\right) \quad . \\ &= 23641 \text{ Pa } (49231 \text{ Pa}).\end{aligned}$$

d) Der Reibungsdruckverlust im Rohrsystem folgt aus:

$$\begin{aligned}\Delta p_R &= \frac{1}{2}\rho\lambda\left(\frac{l_1 + l_3}{D_1}u_1^{\,2} + \frac{l_2}{D_2}u_2^{\,2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\rho\lambda\left(\frac{l_1 + l_3}{D_1}u_1^{\,2} + \frac{l_2}{D_2}\left(u_1\frac{D_1^{\,2}}{D_2^{\,2}}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\rho\lambda u_1^{\,2}\left(\frac{l_1 + l_3}{D_1} + l_2\frac{D_1^{\,4}}{D_2^{\,5}}\right).\end{aligned}$$

Umstellen liefert die Rohrreibungszahl:

$$\lambda = \frac{2\Delta p_R}{u_1^{\,2}\rho\left(\frac{l_1 + l_3}{D_1} + l_2\frac{D_1^{\,4}}{D_2^{\,5}}\right)} = 0{,}152 \; (0{,}467) \,.$$

