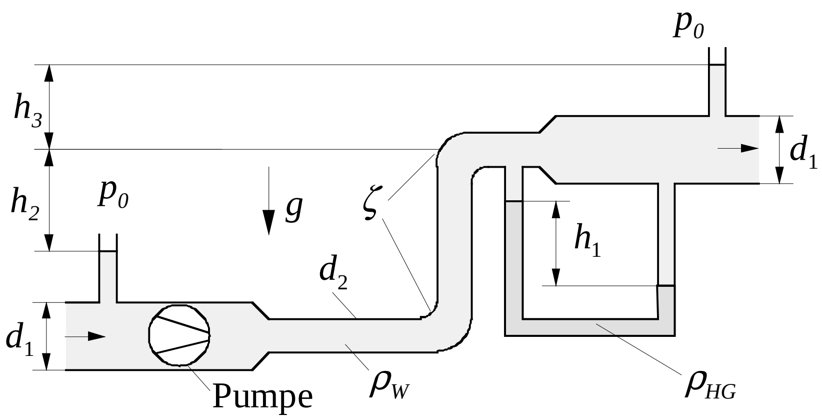
Aufgabe 4.8: Im aufgeführten Rohrsystem (Durchmesser d_1 und d_2) wird Wasser (ρ_W = 1000 kg/m³) mit einer Pumpe gefördert. Am Venturi-Rohr (gefüllt mit Quecksilber, ρ_{HG} = 13500 kg/m³) wird bei der eingestellten Strömung eine Höhendifferenz h_1 abgelesen. Die beiden Krümmer haben jeweils eine Verlustziffer ζ. Verluste durch Strömungserweiterungen und Verengungen werden nicht berücksichtigt.



a) Berechnen Sie den Volumenstrom durch das System!

b) Welche Wellenleistung (Wirkungsgrad η) muss an der Pumpe dafür aufgebracht werden?

Gegeben: $h_1 = 0{,}3\text{ m}$ $\quad h_2 = 1\text{ m}$ $\quad h_3 = 0{,}8\text{ m}$
$d_1 = 1\text{ m}$ $\quad d_2 = 0{,}5\text{ m}$
$\rho_W = 1000\text{ kg/m}^3$ $\quad \rho_{HG} = 13500\text{ kg/m}^3$ $\quad \zeta = 0{,}2$ $\quad \eta = 0{,}95$
$g = 9{,}81\text{ m/s}^2$

Lösung: a) Mit der Konti-Gleichung erhält man:

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 \pi \frac{d_1^2}{4} = u_2 \pi \frac{d_2^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{u_2}{4}.$$

Durch Anwenden der Bernoulli-Gleichung am Venturi-Rohr (vom Punkt 1 im Rohr mit Durchmesser d_2 über der linken Öffnung des Venturi-Rohrs bis zum Punkt 2 im Rohr mit Durchmesser d_1 über der rechten Öffnung des Venturi-Rohrs – jeweils in der Rohrmittelachse)

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho_W u_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_W u_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_W \left(u_2^2 - u_1^2\right)$$

Aus der Hydrostatik im Venturi-Rohr erhält man des weiteren:

$$p_2 + \rho_{HG} g h_1 = p_1 + \rho_W g h_1 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 - p_2 = g h_1 \left(\rho_{HG} - \rho_W\right) = 36788\text{ Pa}.$$

Gleichsetzen der beiden Beziehungen und Einsetzen der Gleichung für die Geschwindigkeit u_1 liefert:

$$g h_1 \left(\rho_{HG} - \rho_W\right) = \frac{1}{2}\rho_W u_2^2 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}\rho_W u_2^2 \left(\frac{15}{16}\right).$$

Umstellen nach u_2:

$$u_2 = \sqrt{gh_1 \frac{32}{15} \frac{\left(\rho_{HG} - \rho_W\right)}{\rho_W}} = 8{,}86 \text{ m/s}^2$$

Für den Volumenstrom folgt damit:

$$\dot{V} = u_2 A_2 = \pi d_2^{\,2} \sqrt{gh_1 \frac{2}{15} \frac{\left(\rho_{HG} - \rho_W\right)}{\rho_W}} = 1{,}739 \text{ m}^3\text{/s} .$$

b) Zur Berechnung der Pumpenleistung wird zunächst die Bernoulli-Gleichung vom unteren Rohreintritt (Rohrmittelachse) bis zum Rohraustritt (Rohrmittelachse) angewendet. Die beiden Krümmer werden durch Druckverluste in der Gleichung berücksichtigt. Die Höhe h^* gibt die Höhendifferenz zwischen der Füllhöhe im unteren Steigrohr und der unteren Rohrmittelachse an. Man erhält:

$$p_0 + \rho_W g h^* + \frac{1}{2}\rho_W u_1^{\,2} + \Delta p_T = p_0 + \rho_W g h^* + \rho_W g\left(h_2 + h_3\right) + \frac{1}{2}\rho_W u_1^{\,2} - \frac{1}{2} 2\zeta \rho_W u_2^{\,2} .$$

Durch Umformung erhält man den Druckanstieg über der Pumpe:

$$\Delta p_T = \rho_W \left(g\left(h_2 + h_3\right) - \zeta u_2^{\,2}\right) = 1962 \text{ Pa} .$$

Die Wellenleistung an der Pumpe ergibt sich mit dem Wirkungsgrad η aus:

$$P = \frac{\Delta p_T \dot{V}}{\eta} = 3592 \text{ W} .$$

