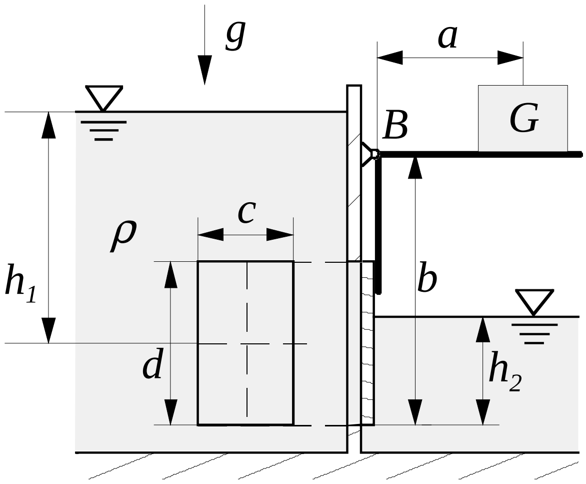
Aufgabe 4.7: Der Ausfluss eines Wehrs wird durch eine rechteckige Klappe (Breite *c*, Höhe *d*), welche über einen masselosen, rechtwinkligen Hebelarm mit der verschiebbaren Masse (Gewichtskraft *G*) verbunden ist, geregelt. Das Wehr soll sich öffnen, wenn auf der linken Seite des Wehrs die Höhe h_1 erreicht ist. Der Füllstand auf der rechten Seite wird als konstant wie dargestellt mit h_2 angenommen. Das Gewicht der Wehrklappe und des Hebels werden vernachlässigt.

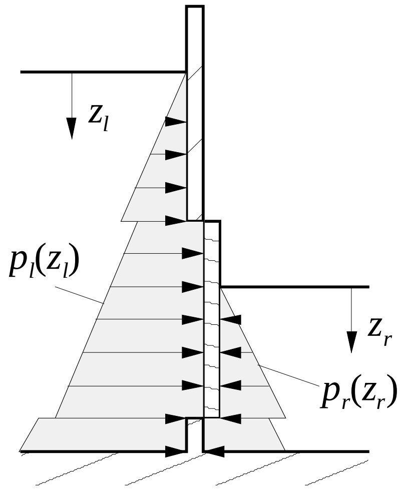


a) Skizzieren Sie die Druckverteilung auf der Klappe!

b) Wie groß muss das verschiebbare Gewicht *G* sein, wenn es im Abstand *a* vom Lager *B* angebracht ist?

Gegeben: a, b, c, d, h_1, h_2 , g, ρ

Lösung: a) Die Koordinate für die Flüssigkeitstiefe auf der linken Seite wird durch z_l und auf der rechten Seite durch z_r ausgedrückt. Der Druck in der Flüssigkeit steigt jeweils linear mit zunehmender Flüssigkeitstiefe an. Die Sprünge in der graphischen Darstellung folgen aus der Wanddicke der Trennwand.



b) Die Druckverteilung in der Flüssigkeit auf der linken Seite der Wehrklappe lautet:

$$p_l = \rho g z_l \, .$$

Mit den Flächenelement der Klappe

$$\mathrm{d}A = c\,\mathrm{d}z_l$$

erhält man die Druckkraft

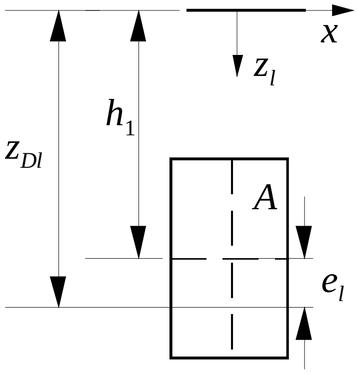
$$\begin{aligned} F_{Dl} &= \iint_A p_l \mathrm{d}A = \rho g c \int_{h_1 - d/2}^{h_1 + d/2} z_l \mathrm{d}z_l \\ &= \frac{1}{2}\rho g c \left(\left(h_1 + d/2\right)^2 - \left(h_1 - d/2\right)^2 \right) \\ &= \rho g c h_1 d. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Kraftangriffspunktes z_{Dl} der Druckkraft F_{Dl} wird ein Momentengleichgewicht um die *x*-Achse (siehe Skizze) vorgenommen:

$$z_{Dl}F_{Dl} = \iint_A z_l \mathrm{d}F \ .$$

Einsetzen der obigen Beziehungen liefert

$$z_{Dl}\rho g d c h_1 = \rho g \iint_A z_l^2 \mathrm{d}A \ .$$



Mit dem Flächenträgheitsmoment um die x-Achse

$$I_x = \iint_A z_l^2 \mathrm{d}A \ ,$$

und dem Satz von Steiner

$$I_x = I_s + z_s^2 A \ ,$$

sowie dem Flächenträgheitsmoment

$$I_s = \frac{cd^3}{12}$$

um den Schwerpunkt der Fläche $A = cd$ mit der Schwerpunktkoordinate $z_s = h_1$ erhält man durch Einsetzen in das Momentengleichgewicht

$$z_{Dl} d c h_1 = \frac{cd^3}{12} + h_1^2 cd$$

und schließlich für die Koordinate des Druckangriffspunktes:

$$z_{Dl} = \frac{d^2}{12h_1} + h_1 \ .$$

Die Differenz zwischen dem Druckangriffspunkt und dem Flächenschwerpunkt ist

$$e_l = z_{Dl} - h_1 = \frac{d^2}{12h_1} \ .$$

Die Druckverteilung auf der rechten Seite der Wehrklappe lautet

$$p_r = \rho g z_r \ .$$

Mit den Flächenelement der Klappe

$$\mathrm{d}A = c\mathrm{d}z_r$$

folgt für die Druckkraft

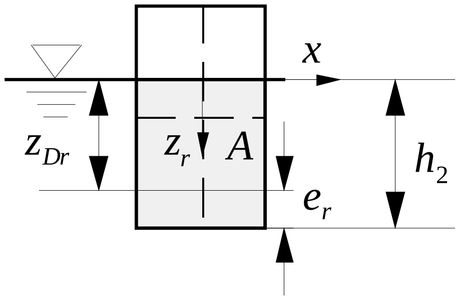
$$F_{Dr} = \iint_A p_r \mathrm{d}A = \rho g c \int_0^{h_2} z_r \mathrm{d}z_r$$
$$= \frac{1}{2}\rho g c h_2^2.$$

Die Bestimmung des Druckangriffspunktes erfolgt analog mit einem Momentengleichgewicht um die x-Achse (siehe Skizze für die Definition des Koordinatensystems)

$$z_{Dr} F_{Dr} = \iint_A z_r \,\mathrm{d}F \,.$$

Einsetzen der obigen Beziehungen liefert

$$z_{Dr} \frac{1}{2} \rho g c h_2^{\,2} = \rho g \iint_A z_r^{\,2} \mathrm{d}A \,.$$



Mit dem Flächenträgheitsmoment um die x-Achse

$$I_x = \iint_A z_l^{\,2} \mathrm{d}A = I_s + z_s^{\,2} A \,,$$

sowie dem Flächenträgheitsmoment

$$I_s = \frac{c h_2^{\,3}}{12}$$

um den Schwerpunkt der Fläche $A = c h_2$ mit der Schwerpunktkoordinate $z_s = {}^{h_2}\!/_{2}$ erhält man durch Einsetzen

$$z_{Dr} \frac{1}{2} c h_2^{\,2} = \frac{c h_2^{\,3}}{12} + \frac{h_2^{\,2}}{4} c h_2 \qquad \Rightarrow \qquad z_{Dr} = \frac{2}{3} h_2 \,.$$

Vom Plattenboden ist der Druckangriffspunkt somit

$$e_r = h_2 - z_{Dr} = \frac{1}{3} h_2$$

entfernt.

Zur Berechnung von G wird eine Momentenbilanz um B (positive Momentenrichtung im Uhrzeigersinn) vorgenommen:

$$G a + F_{Dr} \left(b - e_r\right) - F_{Dl} \left(b - \frac{d}{2} + e_l\right) = 0 \,.$$

Einsetzen der obigen Beziehungen liefert:

$$G a + \frac{1}{2} \rho g c h_2^{\,2} \left(b - \frac{1}{3} h_2\right) - \rho g c h_1 d \left(b + \frac{d^2}{12 h_1} - \frac{d}{2}\right) = 0$$

und durch umstellen

$$G = \frac{\rho g c}{a} \left(h_1 d \left(b + \frac{d^2}{12 h_1} - \frac{d}{2}\right) - \frac{1}{2} h_2^{\,2} \left(b - \frac{1}{3} h_2\right)\right)$$