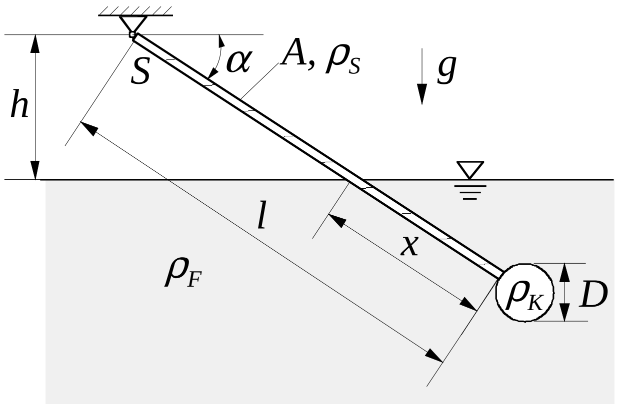
Aufgabe 4.6: Ein homogener Stab (Dichte ρ_S, Querschnittsfläche *A*, Länge *l* ist an seinem Ende in *S* drehbar gelagert. Am anderen Ende befindet sich eine homogene Kugel (Durchmesser *D*, Dichte ρ_K). Der Stab taucht in eine Flüssigkeit (Dichte $\rho_F > \rho_S$ und $\rho_F > \rho_K$), wobei die Kugel vollständig untergetaucht ist.



a) Wie lautet die Eintauchlänge *x*?

b) Unter welchem Neigungswinkel α taucht der Stab ein?

Gegeben: *g*, *h*, *l*, *A*, *D*, ρ_F, ρ_K, ρ_S

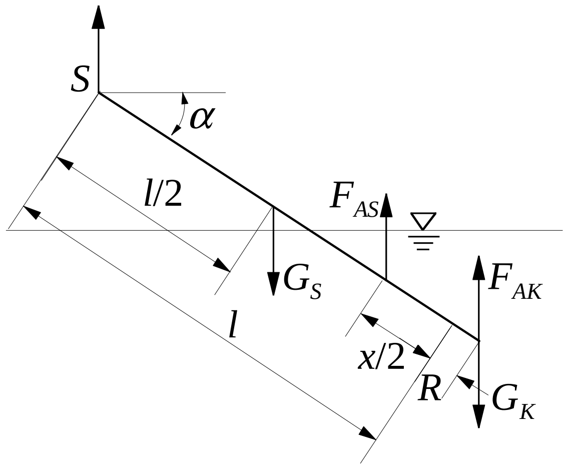
Lösung: a) Die auftretenden Kräfte am eingetauchten Stab sind die Lagerkraft *S*, Die Gewichtskraft des Stabes G_S, die Gewichtskraft der Kugel G_K, die Auftriebskraft des Stabes F_{AS} sowie die Auftriebskraft der Kugel F_{AK}. Die Kräfte ergeben sich zu:

$$G_S = \rho_S A l$$

$$G_K = \frac{1}{6}\pi\rho_K D^3$$

$$F_{AS} = xA\rho_F$$

$$F_{AK} = \frac{1}{6}\pi\rho_F D^3$$



Momentengleichgewicht um *S* ergibt:

$$G_S\frac{l}{2}\cos\alpha + G_K\left(l+\frac{D}{2}\right)\cos\alpha - F_{AS}\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha - F_{AK}\left(l+\frac{D}{2}\right)\cos\alpha = 0\,.$$

Einsetzen der obigen Gleichungen liefert:

$$\rho_S A l\frac{l}{2} + \frac{1}{6}\pi\rho_K D^3\left(l+\frac{D}{2}\right) - xA\rho_F\left(l-\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{6}\pi\rho_F D^3\left(l+\frac{D}{2}\right) = 0\,.$$

Umstellen führt zur quadratischen Gleichung:

$$\rho_S A l\frac{l}{2} + \frac{1}{6}\pi D^3\left(\rho_K - \rho_F\right)\left(l+\frac{D}{2}\right) - xA\rho_F l + A\rho_F\frac{x^2}{2} = 0$$

$$x^2 - x\,2l = -\left(\frac{\rho_S A l^2 + \frac{1}{3}\pi D^3\left(\rho_K - \rho_F\right)\left(l + \frac{D}{2}\right)}{A\rho_F}\right)$$

Die Lösung lautet:

$$x = l \pm \sqrt{l^2 - \left(\frac{\rho_S A l^2 + \frac{1}{3}\pi D^3\left(\rho_K - \rho_F\right)\left(l + \frac{D}{2}\right)}{A\rho_F}\right)}$$

Da $x < l$ sein muss, ist das positive Vorzeichen vor der Wurzel nicht sinnvoll.

b) Der Neigungswinkel ergibt sich aus der Geometrie wie folgt:

$$\sin\alpha = \frac{h}{l - x}$$

Einsetzen der Lösung für x liefert den Neigungswinkel:

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{\rho_S A l^2 + \frac{1}{3}\pi D^3\left(\rho_K - \rho_F\right)\left(l + \frac{D}{2}\right)}{A\rho_F}\right)}}$$