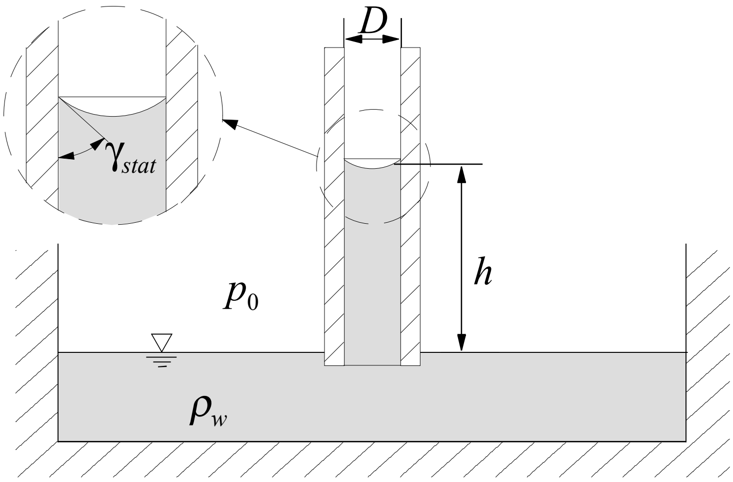
Aufgabe 4.5: Ein offenes Kapillarröhrchen (Umgebungsdruck p_0) mit dem Innendurchmesser D taucht in einem mit Wasser (Dichte ρ_w, Oberflächenspannung σ_w) gefülltem Behälter ein. Der Behälter ist als unendlich ausgedehnt vorzustellen, so dass Kapillarkräfte durch die Krümmung der Oberfläche im Behälter vernachlässigt werden können. Der statische Randwinkel der Flüssigkeit mit der Rohrwand beträgt $\gamma_{stat} > 0°$. Es wird allgemein angenommen, daß Kapillarkräfte an der Flüssigkeitsoberfläche größer als die unmittelbar auftretenden hydrostatischen Kräfte sind und daher mit einer Flüssigkeitsoberfläche in Form einer Kugelkalotte (mit konstantem Krümmungsradius) gerechnet werden kann.



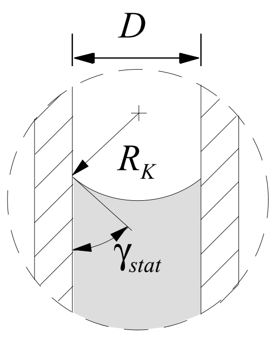
a) Wie lautet die Steighöhe h der Flüssigkeit im Röhrchen?

b) Wie würde die Steighöhe bei einem Randwinkel von $\gamma_{stat} = 0°$ lauten?

Gegeben: D, g, p_0, ρ_w, σ_w, γ_{stat}

Lösung: a) Zur Lösung dieses hydrostatischen Problems mit Einfluß von Kapillarkräften wird zunächst die freie Flüssigkeitsoberfläche im Röhrchen betrachtet. Der Drucksprung über einer gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche beträgt nach der Young-Laplace Gleichung:

$$\Delta p = p_w - p_0 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{1}$$



wobei R_1 und R_2 allgemein die beiden Hauptkrümmungsradien der gekrümmten Oberfläche darstellen und p_0 sowie p_w der Umgebungsdruck bzw. der Druck im Wasser an der Füssigkeitoberfläche ist. Mit der oben getroffenen Annahme, dass Kapillarkräfte an der Flüssigkeitsoberfläche im Gegensatz zu hydrostatischen Kräften dominieren erhält man eine idealisierte Kugelkalotte mit konstantem Krümmungsradius

$$R_1 = R_2 = R_K\,. \tag{2}$$

Anmerkung: Eine dimensionslose Kennzahl, die das Verhältnis von hydrostsichen Kräften zu Kapillarkräften beschreibt, ist die BOND-Zahl $\mathrm{Bo} = \rho g R^2 / \sigma$. Bei BOND-Zahlen $\mathrm{Bo} \ll 1$ (z.B. bei sehr kleinen Rohrradien *R* oder unter Schwerelosigkeit) liegt eine Kugelkalottenform des Meniskus vor. Dem gegenüber ist es ersichtlich, dass bei hohen Beschleunigungen bzw. großen Radien *R* (bzw. $\mathrm{Bo} \gg 1$) ein flacher Meniskus mit Ausnahme der Kontaktlinie am Rohrrand zu sehen ist.

Der Krümmungsradius ergibt sich aus der Geometrie zu:

$$R_K = \frac{D}{2\cos\gamma_{stat}} . \tag{3}$$

Einsetzen der Gln. (2) und (3) in Gl. (1) liefert somit den Drucksprung an der gekrümmten Oberfläche:

$$\Delta p = p_w - p_0 = \frac{4\sigma\cos\gamma_{stat}}{D} . \tag{4}$$

Man erkennt, daß bei einem statischen Randwinkel von 90° der Drucksprung zu null wird, da die Oberfläche eben und nicht gekrümmt ist. Bei statischen Randwinkeln $\gamma_{stat} \geq 90°$ ergibt sich ein negativer Drucksprung mit sogenannter Kapillardepression, wobei sich die Flüssigkeitsgrenzfläche im Röhrchen unterhalb der Behälteroberfläche befindet. Zur Herleitung der Steighöhe der Flüssigkeit wird nun der Druck im Röhrchen auf dem Niveau der Behälteroberfläche ($p = p_0$) berechnet:

$$p_0 = \rho_w g h - \Delta p + p_0 .$$

Von oben wirkt demnach der hydrostatische Druck und der Umgebungsdruck positiv, während der Kapillardruck negativ entgegen wirkt. Der Umgebungsdruck hebt sich also auf. Umstellen und Einsetzen von Gl. (4) liefert damit die Steighöhe:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta p}{\rho_w g} \\ h &= \frac{4\sigma\cos\gamma_{stat}}{D\rho_w g} . \end{aligned} \tag{5}$$

Der Meniskus steigt nach dem Eintauchen in den Behälter demnach solange, bis ein Gleichgewicht zwischen Kapillarkräften und hydrostatischen Kräften besteht. Während des kapillaren Steigens treten zusätzlich dem kapillaren Anstieg entgegenwirkende Effekte (wie Reibung, Eintrittsdruckverlust, Trägheit, dynamischer Randwinkel) auf.

b) Für einen statischen Randwinkel $\gamma_{stat} = 0°$ erhält man entsprechend aus Gl. (5) die größere Steighöhe

$$h = \frac{4\sigma}{D\rho_w g} . \tag{6}$$

© 2000 - 2001 www.IQue.de