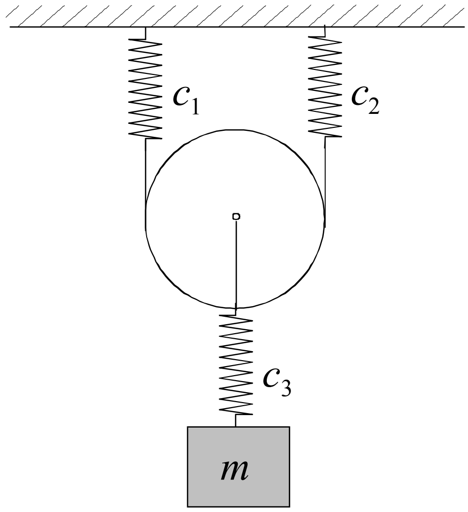
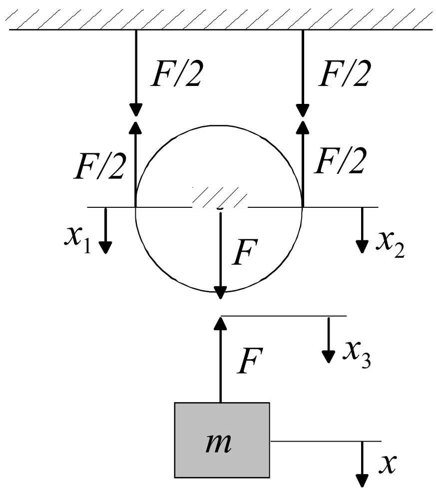
Aufgabe 3.9: Ein Feder-Masse System ist so aufgebaut, daß eine Rolle über zwei miteinander verbundenen Federn (Federsteifigkeiten c_1 und c_2) aufgehängt ist. In der Rollenachse ist wiederum über eine weitere Feder (Federsteifigkeit c_3) eine Masse m gehängt. Die Massen der Federn, Seile und der Rolle sowie Reibungskräfte an der Rolle sind zu vernachlässigen.



a) Wie lautet die Eigenfrequenz des Schwingungssystems?

Gegeben: c_1, c_2, c_3, m

Lösung: a) Als erster Schritt wird das System freigeschnitten die Federauslenkungen x_1 (Auslenkung der Feder 1), x_2 (Auslenkung der Feder 2) und x_3 (alleinige Auslenkung der Feder 3) eingetragen. Das Newton'sche Gesetz für die Masse lautet:



$$m\ddot{x} = -F$$

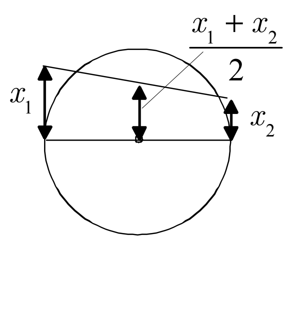
Das Hooksche Gesetz für die Federn liefert:

$$\frac{F}{2} = c_1 x_1 ,$$

$$\frac{F}{2} = c_2 x_2 ,$$

$$F = c_3 x_3 .$$

Als nächster Schritt ist die kinematische Verträglichkeitsbedingung, zwischen den verschiedenen Auslenkungen zu bestimmen. Da die Federn c_1 und c_2 miteinander verbunden sind, lenkt die Rolle vertikal um den Betrag $1/2(x_1 + x_2)$ aus. Die Auslenkung x der Masse ergibt sich demnach aus:



$$x = x_3 + \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right).$$

Einsetzen der obigen Gleichungen liefert:

$$x = \frac{F}{c_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{2c_1} + \frac{F}{2c_3}\right).$$

Durch Umformung erhält man:

$$-F = -\frac{x}{\left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right)}$$

$$= -\frac{x}{\left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{4}\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}\right)}$$

$$= -\frac{x}{\left(\frac{4c_1 c_2}{4c_1 c_2 c_3} + \frac{1}{4}\frac{(c_1 + c_2)c_3}{c_1 c_2 c_3}\right)}$$

$$-F = -\frac{4c_1 c_2 c_3}{4c_1 c_2 + (c_1 + c_2)c_3}x.$$

Gleichsetzen mit dem Newton'schen Gesetz für die Masse (siehe oben) liefert die Schwingungsgleichung einer ungedämpften Schwingung:

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{4c_1 c_2 c_3}{4c_1 c_2 + (c_1 + c_2)c_3}x = 0,$$

die auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

wobei die Eigenfrequenz hierfür

$$\underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{4c_1 c_2 c_3}{4c_1 c_2 + (c_1 + c_2)c_3}}}}$$

lautet.