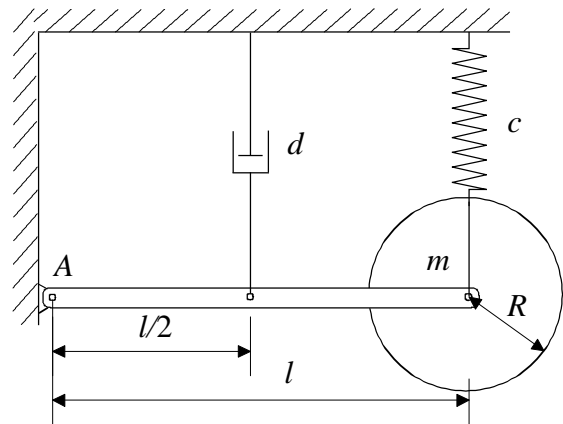


Aufgabe 3.7: An einem in A gelagerten masselosen Stab der Länge l ist eine homogene Scheibe (Masse m , Radius R) wie dargestellt mit einer Feder (Federsteifigkeit c) und einem Dämpfer (Dämpfungskonstante d) verbunden und befindet sich in statischer Ruhelage.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für Schwingungen des Systems mit kleinen Auslenkungen?

b) Wie groß muß die Federsteifigkeit c sein, damit das System schwingungsfähig ist?

Gegeben: $m, c, d, l, R = l/4$

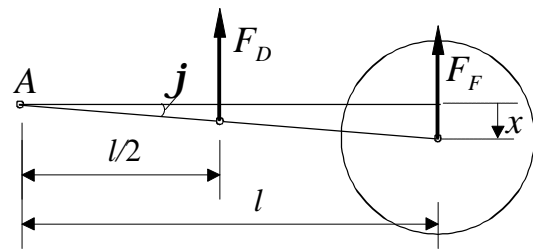
Lösung: a) Bei einer Auslenkung des Stab-Scheibe-Systems aus der statischen Ruhelage mit dem Drehwinkel φ erfolgt eine vertikale Verschiebung der Feder- und Dämpferangriffspunkte. Für kleine Drehwinkel

gilt für die Auslenkung

$$x = l\mathbf{j}$$

und für die Geschwindigkeit

$$\dot{x} = l\dot{\mathbf{j}}.$$



Bei einer Auslenkung um x folgt für die Federkraft

$$F_F = cx = c l\mathbf{j} \quad \text{und für die Dämpfungskraft} \quad F_D = d \frac{\dot{x}}{2} = d \frac{l}{2} \dot{\mathbf{j}}.$$

Die Herleitung der Bewegungsgleichung erfolgt durch Anwendung des Momentensatzes

$$\mathbf{q}_A \mathbf{j} = -F_D \frac{l}{2} - F_F l.$$

Mit dem Massenträgheitsmoment des Stab-Scheibe-Systems (mit $R = l/4$)

$$\mathbf{q}_A = \frac{mR^2}{2} + ml^2 = \frac{33}{32} ml^2$$

ergibt sich

$$\underline{\underline{\mathbf{j} + \frac{32}{132} \frac{d}{m} \mathbf{j} + \frac{32}{33} \frac{c}{m} \mathbf{j} = 0}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{32}{132} \frac{d}{m} \dot{x} + \frac{32}{33} \frac{c}{m} x = 0.}}$$

b) Das gegebene System ist schwingungsfähig, wenn das Lehr'sche Dämpfungsmaß $D < 1$ ist. Bei einer Formulierung der obigen Gleichung zu $\ddot{x} + 2d\dot{x} + w^2x = 0$ mit der

Abklingkonstanten d und der Kreisfrequenz w der ungedämpften Schwingung ist das Dämpfungsmaß durch $D = d/w$ definiert. Somit folgt

$$\frac{16}{132} \frac{d}{m} < \sqrt{\frac{32}{33} \frac{c}{m}} \rightarrow c > \frac{1}{66} d^2 m.$$