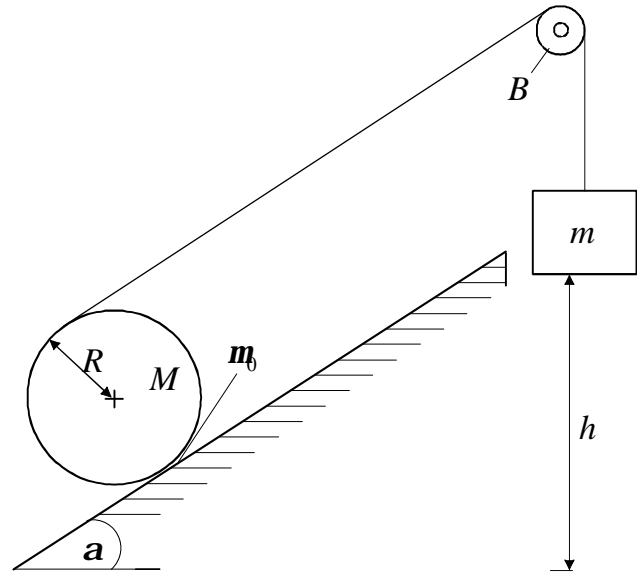


Aufgabe 3.6: An einem homogenen Zylinder (Masse M , Radius R) wird durch ein herumgewickelteres Seil über eine Umlenkrolle B die Last m gehängt. Der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Zylinder und der um den Winkel α geneigten Bahn beträgt μ_0 . Reibungsverluste und das Massenträgheitsmoment der Umlenkrolle B werden vernachlässigt.



- Wie lautet die Beschleunigung der Masse m bei reinem Rollen des Zylinders?
- Wie groß muß für die Bedingung des reinen Rollens der Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein?
- Wie lange dauert es, bis die Masse m aus anfänglicher Ruhe die Höhe h durchläuft?

Gegeben: $R, g, h, M, m = 3/4M, \alpha = 30^\circ$

Lösung: Durch Freischneiden der beiden Systeme (Zylinder M und Masse m) lassen sich die Bewegungsgleichungen herleiten:

$$\sum F_x = 0: M\ddot{x} = F_s - H - Mg \sin \alpha$$

$$\sum F_y = 0 = N - Mg \cos \alpha$$

$$\sum F_z = 0: m\ddot{z} = mg - F_s.$$

Anwendung des Momentensatzes um S für den Zylinder liefert:

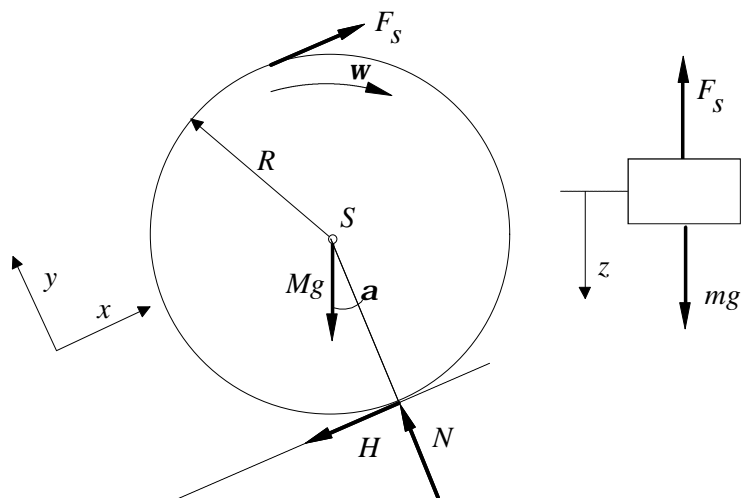
$$\mathbf{q}_S \mathbf{j} = F_s R + HR$$

Die kinematischen Beziehungen für reines Rollen zwischen dem Zylinder M und der Masse m lauten:

$$x = R\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = R\mathbf{j} \quad \text{und} \quad y = 2x \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = 2\ddot{x},$$

wobei für das Massenträgheitsmoment des Zylinders $\mathbf{q}_S = MR^2/2$ gilt. Einsetzen der Beziehungen in obige Bewegungsgleichungen liefert:

$$H = -\left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{z} + mg - Mg \sin \alpha \quad \text{und} \quad H = \left(\frac{M}{4} + m\right)\ddot{z} - mg.$$



Gleichsetzen dieser Beziehungen liefert die Beschleunigung der Masse m

$$\ddot{z} = g \frac{3m - M \sin \alpha}{\frac{3}{4}M + 2m} = g \frac{\frac{9}{4}M - \frac{2}{4}M}{\frac{3}{4}M + \frac{6}{4}M} = \frac{7}{9}g.$$

b) Für den Fall des reinen Rollens (ohne Schlupf) muß gelten:

$$H \leq m_0 N.$$

Die Haftkraft H ergibt sich mit der errechneten Beschleunigung zu

$$H = \left(\frac{M}{4} + m \right) \frac{7}{9}g - mg = g \left(\frac{7}{36}M - \frac{2}{9}m \right) = \frac{1}{36}Mg$$

und die Normalkraft aus obiger Bewegungsgleichung in y -Richtung liefert

$$N = Mg \cos \alpha = \frac{18}{36}Mg.$$

Somit ist der gesuchte Haftreibungskoeffizient

$$m_0 \geq \frac{H}{N} \quad \Rightarrow \quad \underline{m_0 \geq \frac{1}{18}}.$$

c) Die Berechnung der Fallzeit der Masse m folgt aus der Lösungen für die Beschleunigung

$$\ddot{z} = \frac{7}{9}g$$

und anschließender Integration

$$\dot{z} = \frac{7}{9}gt + C_1$$

$$z = \frac{7}{9}gt^2 + C_1t + C_2.$$

Mit den Anfangsbedingungen $z(t=0) = 0$ und $\dot{z}(t=0) = 0$ ergeben sich $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ und mit

$$z(t = t_F) = h = \frac{7}{9}gt_F^2$$

die Fallzeit

$$\underline{t_F = \sqrt{\frac{9h}{7g}}}.$$