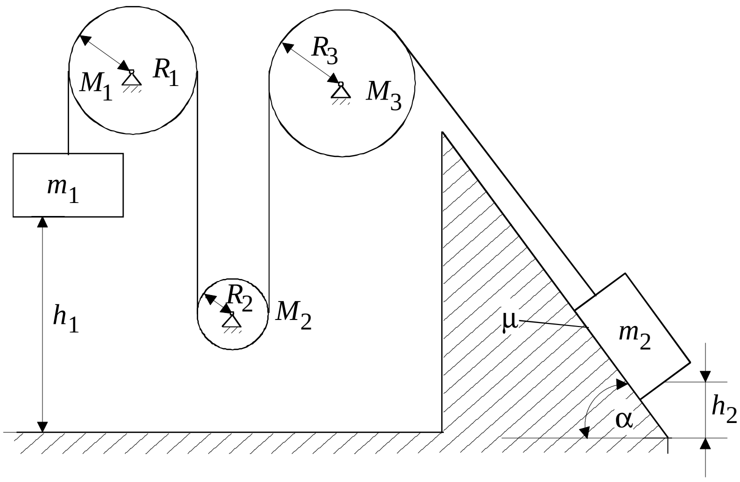
Aufgabe 3.5: Zwei Massen m_1 und m_2 ($m_1 > m_2$) sind durch ein masseloses Seil über drei Umlenkrollen wie in der Skizze dargestellt miteinander ver-bunden. Die Masse m_2 rutscht (Reibungskoeffizient μ) dabei auf einer um den Winkel α geneigten Rampe. Die Rollen 1 bis 3 (Massen M_1, M_2, M_3 mit den Radien R_1, R_2, R_3) können als Zylinder aufgefaßt werden. Das System wird aus der Ruhe losgelassen, wobei angenommen wird, daß an den Rollen kein Schlupf auftritt.



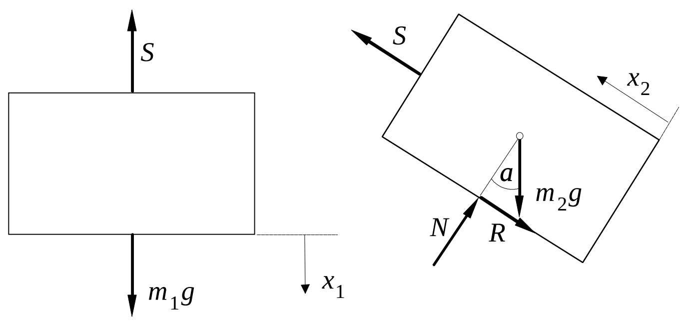
a) Bestimmen sie die Energiebilanz für die sich ergebende Bewegung!

b) Wie lautet die Beschleunigung der Masse m_1?

c) Bestimmen sie die Zeit bis die Masse m_1 den Boden erreicht!

Gegeben: g, m_1, m_2, M_1, M_2, M_3, R_1, R_2, R_3, h_1, h_2, μ

Lösung: a) Die Energiebilanz erhält man aus der Summe der kinetischen Energie, potentiellen Energie, Rotationsenergie und der Reibungsenergie des Systems.



kinetische Energie der Massen: $$E_K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

potentielle Energie der Massen: $$E_P = m_1 g \left(h_1 - x_1\right) + m_2 g \left(h_2 + x_2 \sin\alpha\right)$$

Rotationsenergie der Massen: $$E_{Rot} = \frac{1}{2}\Theta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_3 \dot{\varphi}_3^2$$

Reibenergie bzw. Reibarbeit von m_2: $$W_R = R x_2$$

Die Reibkraft folgt aus einer Kräftebilanz an der Masse m_1 und dem Coulomb'schen Reibungsgesetz:

$$N = mg\cos\alpha \qquad \text{und} \qquad R = \mu N\,.$$

Mit den Massenträgheitsmomenten der Rollen

$$q_1 = \frac{M_1 R_1^2}{2}, \qquad q_2 = \frac{M_2 R_2^2}{2}, \qquad q_3 = \frac{M_3 R_3^2}{2}$$

und den kinematischen Beziehungen:

$$x = x_1 = x_2 = R_1 j_1 = R_2 j_2 = R_3 j_3 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = R_1 \dot{j}_1 = R_2 \dot{j}_2 = R_3 \dot{j}_3$$

erhält man damit die Energiebilanz

$$\begin{aligned} E_{ges} &= \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m_2 + m_1\right) + m_1 g\left(h_1 - x\right) + m_2 g\left(h_2 + x\sin a + x m\cos a\right) + \left(\frac{M_1}{4} + \frac{M_3}{4} + \frac{M_3}{4}\right)\dot{x}^2 \\ &= konst. \end{aligned}$$

b) Durch die Ableitung der Energiebilanz nach der Zeit unter Beachtung von $\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}t} = 2\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = 2\dot{x}\ddot{x}$ erhält man:

$$0 = \ddot{x}\left(m_2 + m_1\right) - m_1 g + m_2 g\left(\sin a + m\cos a\right) + \left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{2} + \frac{M_3}{2}\right)\ddot{x}$$

und nach Umstellen die gesuchte Beschleunigung der Masse m_1

$$\ddot{x} = \frac{\left(m_1 - m_2\left(\sin a + m\cos a\right)\right)}{m_2 + m_1 + \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{2} + \frac{M_3}{2}}.$$

c) Die Zeit t_F bis die Masse m_1 den Boden erreicht, erhält man durch Integration der Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{\left(m_1 - m_2\left(\sin a + m\cos a\right)\right)}{m_2 + m_1 + \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{2} + \frac{M_3}{2}} = a,$$

$$\dot{x} = at + C_1,$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2.$$

Mit den Anfangsbedingungen (Beschleunigung aus der Ruhelage)

$x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ folgen $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$.

Die Zeit t_F ergibt sich schließlich mit

$$x\left(t_F\right) = h_1 = \frac{1}{2}a t_F^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_F = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} = \sqrt{2h_1 \frac{m_1 + m_2 + \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{2} + \frac{M_3}{2}}{\left(m_1 - m_2\left(\sin a + m\cos a\right)\right)}}$$