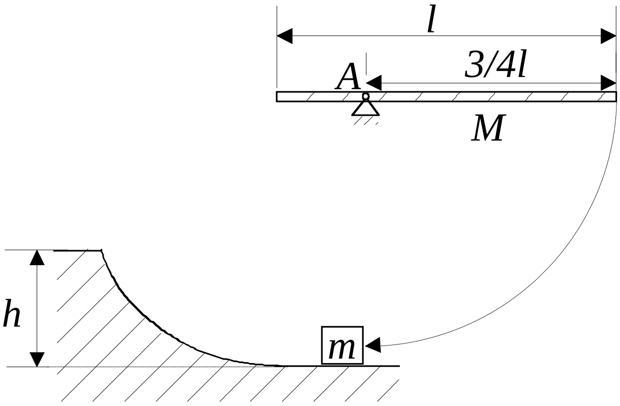
Aufgabe 3.4: Ein in *A* gelagerter homogener Stab (mit der Länge *l* und der Masse *M*) wird aus der horizontalen Ruhelage heraus wie skizziert losgelassen und stößt rein elastisch nach einer viertel Umdrehung die ruhende Masse *m* an. Die Masse *m* bewegt sich daraufhin reibungsfrei eine Ebene hinauf.



a) Welche Geschwindigkeit und welche Bewegungsrichtung hat der Stab nach dem Stoßvorgang?

b) Wie schwer muß der Stab sein, damit die Masse m mindestens die Höhe h erreicht?

Gegeben: *g*, *M*, *m*, *h*, *l*

Lösung: a) Die Winkelgeschwindigkeit des Stabes vor dem Stoß folgt aus dem Energiesatz:

$$Mg\frac{l}{4} = \frac{1}{2}q_A w^2 \qquad \text{mit :} q_A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}M\right)\left(\frac{1}{4}l\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}M\right)\left(\frac{3}{4}l\right)^2 = \frac{7}{48}Ml^2 .$$

Einsetzen und Umstellen liefert die Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoß

$$w = \sqrt{\frac{24}{7}\frac{g}{l}} .$$

Für den elastischen Stoß gilt (mit $\overline{w}$: Winkelgeschwindigkeit des Stabes und $\overline{u}$: Geschwindigkeit der Masse *m* <u>nach dem Stoß</u>)

$$e = 1 = -\frac{\frac{3}{4}l\overline{w} - \overline{u}}{\frac{3}{4}lw - 0} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{u} = \frac{3}{4}l\,(\overline{w} + w) .$$

Des weiteren ist die Drehimpulserhaltung zu berücksichtigen ($\hat{F}$: Stoßkraft):

$$m\overline{u} = -\hat{F} \qquad \text{und} \qquad q_A(\overline{w} - w) = \frac{3}{4}l\hat{F} \qquad \Rightarrow \qquad q_A w = q_A\overline{w} + \frac{3}{4}lm\overline{u} .$$

Einsetzen der obigen Beziehungen:

$$\overline{w} = \frac{(7M - 27m)}{(7M + 27m)}w .$$

Wenn $7M - 27m > 0$ bzw. $M > \frac{27}{7}m$ ist, dann ist $\overline{w}$ positiv und der Stab bewegt sich weiter vorwärts. Im Fall $M < \frac{27}{7}m$ prallt der Stab zurück und für $M = \frac{27}{7}m$ bleibt der Stab stehen.

b) Der Energiesatz für die reibungslos bewegte Masse *m* liefert, wobei direkt nach dem Stoß (1) die Masse *m* nur eine kinetische Energie und in der Höhe *h* (2) nur eine potentielle Energie aufweist:

$$E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2}$$
$$\frac{1}{2} m\bar{u}^2 + 0 = 0 + mgh \quad .$$

Daraus folgt:

$$\bar{u} = \sqrt{2gh} = \frac{3}{4} l\left(\bar{w} + w\right) = \frac{3}{4} lw\left(\frac{(7M - 27m)}{(7M + 27m)} + 1\right) = \frac{3}{4} l\sqrt{\frac{24}{7}\frac{g}{l}}\left(\frac{(7M - 27m)}{(7M + 27m)} + 1\right)$$

und durch weiteres Umformen:

$$\left(\sqrt{\frac{h}{l}\frac{28}{27}} - 1\right)(7M + 27m) = (7M - 27m)$$
$$\underline{\underline{M = \frac{\sqrt{\frac{h}{l}\frac{108}{7}}}{\left(2 - \sqrt{\frac{h}{l}\frac{28}{27}}\right)} m.}}$$