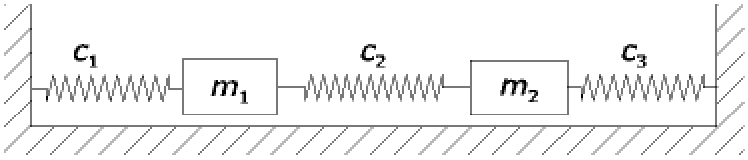
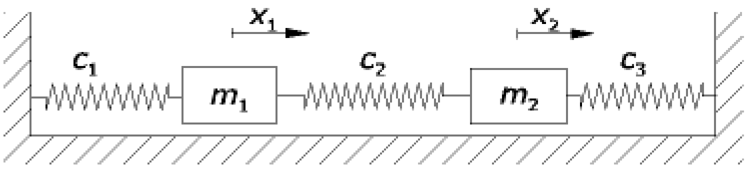
Aufgabe 3.1: Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch Federn miteinander verbunden und bewegen sich nach einer Auslenkung reibungsfrei auf einer Ebene. Die Federn haben die Federsteifigkeiten c_1, c_2 und c_3. Ermitteln Sie mittels der Lagrange'schen Gleichungen die Bewegungsgleichungen für die Masse m_1 und die Masse m_2.



Lösung: Für das konservative System mit zwei Freiheitsgraden werden die Auslenkungen x_1 und x_2 aus der Ruhelage als generalisierte Koordinaten gewählt. Für die potentielle und die kinetische Energie erhält man



$$E_p = \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + \frac{1}{2}c_3 x_2^2 + \frac{1}{2}c_2\left(x_2 - x_1\right)^2 , \qquad E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 ,$$

und damit für die Lagrange Funktion

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}c_1 x_1^2 - \frac{1}{2}c_3 x_2^2 - \frac{1}{2}c_2\left(x_2 - x_1\right)^2 .$$

Durch Einsetzen in die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

ergeben sich mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1 x_1 + c_2\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -c_3 x_2 - c_2\left(x_2 - x_1\right)$$

die Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2\left(x_2 - x_1\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{m_1\ddot{x}_1 + x_1\left(c_1 + c_2\right) - c_2 x_2 = 0}}$$

$$m_2\ddot{x}_1 + c_3 x_2 + c_2\left(x_2 - x_1\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{m_2\ddot{x}_1 + x_2\left(c_2 + c_3\right) + -x_1 c_2 = 0}}$$