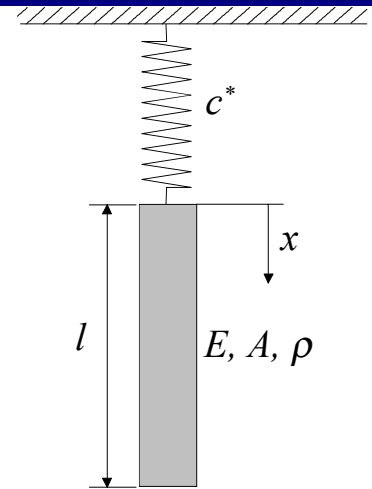


**Aufgabe 3.10:** Ein homogener Stab mit der konstanten Querschnittsfläche  $A$ , der Länge  $l$ , der Dichte  $\rho$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  hängt an einer Feder der Federsteifigkeit  $c^*$ . Der Stab kann freie Longitudinalschwingungen ausführen, wobei keine Temperaturänderungen zu berücksichtigen sind. Es sollen für folgende Bedingungen die Eigenfrequenzen des Systems bestimmt werden.

- Die Federsteifigkeit  $c^*$  ist gleich null!
- Die Federsteifigkeit  $c^*$  strebt gegen unendlich!



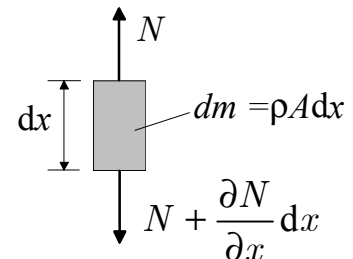
Gegeben:  $c^*$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $l$ ,  $\rho$

**Lösung:** a) Durch Freischneiden eines Stabelementes  $dm$  und der Definition der Verschiebung dieses Elementes in  $x$ -Richtung (Stabachse) durch  $u(x,t)$  folgt das Bewegungsgesetz:

$$dm\ddot{u} = -N + \left( N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right)$$

$$\rho A dx \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x} dx$$

$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x} = N'$$



Für das isotherme Problem folgt mit der kinematischen Beziehung für die örtliche Dehnung

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = u'$$

und dem Elastizitätsgesetz

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

wobei  $\sigma$  die durch die Normalkraft über der Querschnittsfläche  $A$  hervorgerufene Spannung ist

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

die Beziehung für die Normalkraft

$$N = EAu'.$$

Einsetzen in das obige Bewegungsgesetz liefert die eindimensionale Wellengleichung für die Longitudinalschwingung des Stabes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Für die Lösung der Wellengleichung wird der Bernoulli'sche Produktansatz gewählt, bei der die Lösung für die Verschiebung  $u(x,t)$  sich aus dem Produkt einer Ortsfunktion  $U(x)$  und einer Zeitfunktionen  $f(t)$  zusammensetzt:

$$u(x,t) = U(x)f(t).$$

Setzt man diesen Lösungsansatz in die obige Wellengleichung ein, erhält man

$$U(x)\ddot{f}(t) = c_0^2 f(t)U''(x).$$

Umstellen liefert:

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = c_0^2 \frac{U''(x)}{U(x)}.$$

Man sieht, daß die linke Seite nur von der Zeit  $t$  und die rechte Seite nur vom Ort  $x$  abhängt. Für alle  $t$  und  $x$  kann dieses jedoch nur erfüllt sein, wenn beide Seiten konstant sind (als Konstante wird hier  $-\omega^2$  angesetzt):

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = c_0^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2,$$

wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz einer harmonischen Schwingung sowohl für die Zeitfunktion als auch für die Ortsfunktion beschreibt. Es ergeben sich damit die beiden homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$U'' + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 U = 0,$$

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0$$

mit den allgemeinen Lösungen:

$$U(x) = A \cos \frac{\omega}{c_0} x + B \sin \frac{\omega}{c_0} x,$$

$$f(t) = C \cos \omega t + S \sin \omega t.$$

Eingesetzt in den Produktansatz folgt die Gesamtlösung:

$$u(x,t) = \left( A \cos \frac{\omega}{c_0} x + B \sin \frac{\omega}{c_0} x \right) (C \cos \omega t + S \sin \omega t)$$

bzw. durch Einführung der Konstanten  $A^*$  und  $B^*$ , welche die Konstanten  $A, B, C$  und  $S$  enthalten:

$$u(x, t) = \left( A^* \cos \frac{\omega}{c_0} x + B^* \sin \frac{\omega}{c_0} x \right) (\cos \omega t - \alpha),$$

mit

$$D = \sqrt{C^2 + S^2},$$

$$A^* = AD,$$

$$B^* = BD,$$

$$\alpha = \arctan \frac{S}{C}.$$

Die Konstanten  $A^*$  und  $B^*$  müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. Mit der Bedingung, daß die Normalkraft am Stabanfang ( $x = 0$ ) der Federkraft entspricht folgt die erste Randbedingung:

$$N(0, t) = c^* u(0, t)$$

Mit der obigen Beziehung für die Normalkraft folgt daraus:

$$c^* u(0, t) - EA u'(0, t) = 0.$$

Einsetzen von

$$u(0, t) = A^* (\cos \omega t - \alpha)$$

und

$$u'(0, t) = B^* \frac{\omega}{c_0} (\cos \omega t - \alpha)$$

liefert

$$c^* A^* - EAB^* \frac{\omega}{c_0} = 0.$$

Am freien Ende des Stabes bei ( $x = l$ ) ist die Normalkraft gleich null. Somit folgt für die zweite Randbedingung:

$$N(l, t) = EA u'(l, t) = 0.$$

Einsetzen von

$$u'(l, t) = \left( -A^* \frac{\omega}{c_0} \sin \frac{\omega}{c_0} l + \frac{\omega}{c_0} B^* \cos \frac{\omega}{c_0} l \right) (\cos \omega t - \alpha)$$

liefert

$$-\left( \frac{\omega}{c_0} EA \sin \frac{\omega}{c_0} l \right) A^* + \left( \frac{\omega}{c_0} EA \cos \frac{\omega}{c_0} l \right) B^* = 0.$$

Aus den beiden Randbedingungen ergeben sich folglich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Das Gleichungssystem wird gelöst durch Eliminieren der Koeffizientenmatrix:

$$\frac{c^* c_0}{\omega EA} = \tan \frac{\omega}{c_0} l.$$

Mit der Abkürzung:

$$\lambda = \frac{\omega}{c_0} l$$

vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\frac{c^* l}{\lambda EA} = \tan \lambda.$$

Es werden die beiden Grenzfälle für die Federsteifigkeit  $c^*$  untersucht:

a) Die Federsteifigkeit  $c^*$  ist gleich null, damit folgt

$$\tan \lambda = 0$$

und schließlich

$$\lambda_n = n\pi,$$

$$\underline{\underline{\omega_n = \frac{\lambda_n c_0}{l} = \frac{n\pi c_0}{l} = n\pi \sqrt{\frac{E}{l^2 \rho}}.}}$$

b) Die Federsteifigkeit  $c^*$  ist unendlich groß:

$$\lim_{c^* \rightarrow \infty} \tan \lambda = \infty$$

Daraus folgt:

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi$$

und

$$\underline{\underline{\omega_n = \frac{\lambda_n c_0}{l} = \frac{n\pi c_0}{l} = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{E}{l^2 \rho}}.}}$$