Aufgabe 5.2: Gegeben ist das Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung durch die Geschwindigkeitskomponenten $u = a\left(x^4+1\right)$ und $v = -4ax^2y$.

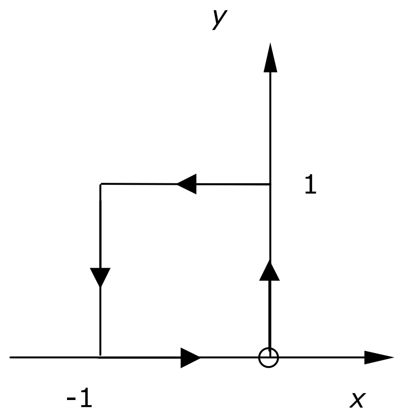
a) Wie groß ist die Zirkulation um das Quadrat, das von den Koordinatenachsen und den Geraden $x=-1$ und $y=1$ gebildet wird?

b) Untersuchen Sie, ob eine Potentialströmung vorliegt und berechne Sie die Stromfunktion!

c) Welche Flüssigkeitsmenge pro Höhe Eins und Zeit Eins fließt zwischen den Punkten $x_1=-1$, $y_1=0$ und $x_2=0$, $y_2=1$ hindurch?

Lösung: a) Die Zirkulation, um das festgelegte Quadrat ergibt sich aus dem Ringintegral:

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \oint \vec{w}\,\mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^1 v_{x=0}\,\mathrm{d}y + \int_0^{-1} u_{y=1}\,\mathrm{d}x + \int_1^0 v_{x=-1}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 u_{y=0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^{-1} a\left(x^4+1\right)\mathrm{d}x + \int_1^0 (\text{-}4ay)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 a\left(x^4+1\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \left[a\left(\frac{1}{5}x^5+x\right)\right]_0^{-1} + \left[-\frac{4}{2}ay^2\right]_1^0 + \left[a\left(\frac{1}{5}x^5+x\right)\right]_{-1}^0 \\
&= 2a
\end{aligned}
$$



b) Eine Potentialströmung liegt vor, wenn die Strömung rotationsfrei ist, also:

$$\mathrm{rot}\vec{v} = 0$$

vorliegt. Somit folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = i\cdot 0 - j\cdot 0 + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= -8axyk \neq 0.
\end{aligned}
$$

Da $\mathrm{rot}\vec{v} \neq 0$ vorliegt, ist die Strömung drehungsbehaftet und es liegt keine Potentialströmung vor. Eine Potentialfunktion kann damit nicht definiert werden. Eine Stromfunktion hingegen liegt vor, wenn die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Das heißt im Fall der zweidimensionalen inkompressiblen Strömung somit

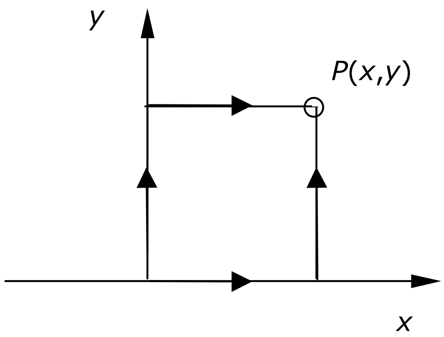
$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{v} &= 0 \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 4ax^2 - 4ax^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Damit liegt eine Stromfunktion vor, und eine Stromfunktion kann definiert werden.

Berechnen läßt sich die Stromfunktion mit dem totalen Differential* (siehe Anmerkung unten) wie folgt:

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = -v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

Für die Ermittlung der Funktion durch Integration des totalen Differentials ist der Integrationsweg zum Aufpunkt $P(x,y)$ beliebig zu wählen:



$$\int_{\Psi_0}^{\Psi} \mathrm{d}\Psi = \int_0^x -v_{y=0}\mathrm{d}x + \int_0^y u_{x=const}\mathrm{d}y = \int_0^x 0\cdot \mathrm{d}x + \int_0^y a\left(x^4+1\right)\mathrm{d}y$$

Die Integration dieser Gleichung liefert somit die gesuchte Stromfunktion:

$$\underline{\underline{\Psi(x,y) = a\left(x^4+1\right)y + \Psi_0}},$$

wobei Ψ_0 eine Konstante darstellt.

c) Das zwischen den Punkten $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ pro Höhe Eins und pro Zeit Eins durchflossene Volumen $\dot{V}_{21}$ ergibt sich wie folgt:

$$\dot{V}_{21} = \int_1^2 \mathrm{d}\dot{V} = \int\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = \int \mathrm{d}\Psi \to \dot{V}_{21} = \Psi_2 - \Psi_1$$
$$= \int_1^2 (-v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y).$$

Das Volumen $\dot{V}_{21}$ entspricht der Differenz der Stromfunktionswerte, die durch die Punkte P_1 und P_2 gehen. Für die Stromlinie durch den Punkt $P_1(-1,0)$ erhält man

$$\Psi - \Psi_0 = a(1+1)\cdot 0 = 0$$

für die Stromlinie durch den Punkt $P_2(0,1)$ erhält man

$$\Psi - \Psi_0 = a(0+1)\cdot 1 = a\,.$$

Somit ergibt sich der gesucht Volumenstrom zu

$$\underline{\underline{\dot{V}_{21} = \Psi_2 - \Psi_1 = a}}.$$

* In Aufgabe 5.1 wurde die Stromfunktion aus dem Geschwindigkeitsvektor auf einem anderen Weg mittels partieller Integration der einen Geschwindigkeitskomponente und anschließender partieller Differentiation der anderen Geschwindigkeitskomponente ermittelt. Der hier gezeigte Lösungsweg durch Anwendung des Totalen Differentials ist schneller und unserer Meinung nach eleganter.

