

**Aufgabe 5.1:** Für die beiden zweidimensionalen inkompressiblen Strömungen sind die rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten  $u(x,y)$  und  $v(x,y)$  des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v} = (u, v)$  in Abhängigkeit vom Ort gegeben.

Strömung A)  $u = ax, \quad v = -ay$

Strömung B)  $u = ay, \quad v = -ax$

a) Es ist zu untersuchen, ob Potentialströmungen vorliegen. Wie lauten gegebenenfalls die Potentialfunktionen  $\Phi_{A,B}(x,y)$ ?

b) Falls Stromfunktionen  $\Psi_{A,B}(x,y)$  definiert werden können, wie lauten diese?

**Lösung:** a) Potentialströmungen sind reibungsfrei, womit neben der Kontinuitätsgleichung ebenfalls die Drehungsfreiheit erfüllt sein muß. Daher ist zunächst zu untersuchen, ob  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$  für die Bedingung der Drehungsfreiheit erfüllt ist. Für den Fall der zweidimensionalen Strömung in der  $x,y$ -Ebene, existiert nur die  $z$ -Komponente der Drehung  $\vec{\omega}$  und somit gilt für die Potentialströmung die Bedingung

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (1)$$

Als weitere Bedingung muß die Kontinuitätsgleichung für zweidimensionale inkompressible Strömungen erfüllt sein:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (2)$$

Überprüfen der Drehungsfreiheit:

Strömung A)  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \omega_z = 0 \quad (3)$

Strömung B)  $\frac{\partial v}{\partial x} = -a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a \quad \Rightarrow \omega_z = -a \quad (4)$

Da für die Strömung B die Drehungsfreiheit nicht erfüllt ist, liegt hierfür keine Potentialströmung vor.

Überprüfen der Erfüllung der Kontinuitätsgleichung:

Strömung A)  $\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -a \quad \Rightarrow 0 = 0. \quad (5)$

Strömung B)  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0. \quad (6)$

Für beide Strömungen ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt, womit für Strömung A sowohl eine Potentialfunktion  $\Phi_A(x, y)$  als auch eine Stromfunktion  $\Psi_A(x, y)$  definiert werden kann. Für Strömung B kann nur eine Stromfunktion  $\Psi_B(x, y)$  aufgrund der alleinigen Erfüllung der Kontinuitätsgleichung berechnet werden.

Die Potentialfunktion für Strömung A erhält man durch partielles Integrieren der Definitionen

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{oder} \quad (7)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (8)$$

*Eine weitere (und vielleicht elegantere) Möglichkeit besteht durch Anwendung des Totalen Differentials für die Potentialfunktion. Dieses wird in einer der nächsten Aufgaben durchgeführt.*

Aus der oben genannten Definition Gl. (7) folgt nach Einsetzen der Geschwindigkeitskomponente:

$$\partial \Phi = u \partial x = ax \partial x. \quad (9)$$

Partielle Integration über  $x$  liefert:

$$\Phi_A(x, y) = \frac{1}{2} ax^2 + f(y), \quad (10)$$

wobei die unbekannte Funktion  $f(y)$  als Integrationskonstante berücksichtigt werden muß. Eine anschließende partielle Differentiation nach  $dy$  zeigt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 + \frac{\partial}{\partial y}(f(y)). \quad (11)$$

Aus oben genannter Definition Gl. (8) für die Potentialfunktion ist bekannt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v = -ay. \quad (12)$$

Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen (11) und (12) liefert:

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(y)) = -ay. \quad (13)$$

Integration über  $y$  liefert schließlich die Lösung für die unbekannte Funktion:

$$f(y) = -\frac{1}{2} ay^2 + C_1. \quad (14)$$

Durch Einsetzen von (14) in (10) erhält man die gesuchte Lösung der Potentialfunktion für die Strömung A:

$$\underline{\underline{\Phi_A(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}ay^2 + C_1}} \quad (15)$$

b) Zur Berechnung der Stromfunktionen der beiden Strömungen werden die Definitionen

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{oder} \quad (16)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (17)$$

verwendet.

**Strömung A:** Aus Gl. (17) folgt

$$\partial \Psi = -v \partial x = ay \partial x \quad (18)$$

mit anschließender partieller Integration

$$\Psi_A(x, y) = axy + g(y). \quad (19)$$

Die partielle Differentiation dieser Beziehung nach dy liefert

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = ax + \frac{\partial}{\partial y}(g(y)). \quad (20)$$

Aus Gl. (16) erhält man

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u = ax \quad (21)$$

und durch Gleichsetzen der Beziehungen Gl. (20) und (21) schließlich

$$\frac{\partial}{\partial y}(g(y)) = 0. \quad (22)$$

Auflösen zeigt, daß die Funktion  $g(y)$  eine Konstante ist

$$g(y) = C_2. \quad (23)$$

Durch Einsetzen von Gl. (23) in Gl. (19) erhält man die gesuchte Stromfunktion

$$\underline{\underline{\Psi_A(x, y) = axy + C_2}} \quad (24)$$

**Strömung B:** Analog erhält man mit gleichem Rechenweg die Stromfunktion:

$$\underline{\underline{\Psi_B(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}ay^2 + C_3}} \quad (25)$$